Title	Dissipative Periodic Systems : Levinson-Masseraの等式 (電気回路の力学系)
Author(s)	白岩, 謙一
Citation	数理解析研究所講究録 (1976), 284: 171-185
Issue Date	1976-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/106083
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
284巻 1976年 171-185

Dissipative Periodic Systems (Levinson-Massera の等式)

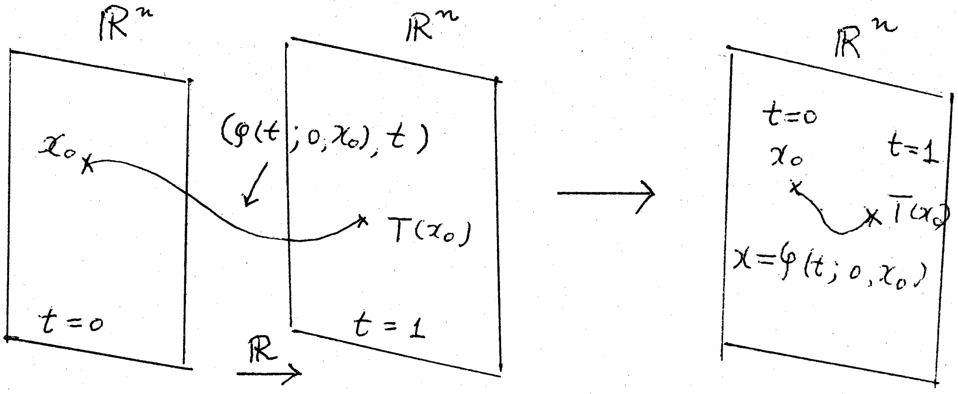
名大 教養部　白岩謙一

§1. 次のような微分方程式を考える.

(1) $\dot{x}=f(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$

ここで, $f(t,x)$ は C^1 級の $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数で, t に関して周期 1 の周期関数であるとする. そして, さらに, 方程式(1)は任意の初期条件 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ に対して, その解の最大存在区間が $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ となるものとする. そして, このような解を $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ と表わす.

いま写像 $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ を $T(x_0)=\varphi(1;0,x_0)$ と定義する. これを方程式(1)の Poincaré 変換という.



<u>命題1</u>　TはC^1級微分同相写像で，恒等写像とisotopicである．したがって，特にorientationを保つ．

<u>証明</u>　Tが全単射で$T^{-1}(x_0)=\varphi(0;1,x_0)$となる．また，$f(t,x)$が$C^1$級だから，Tと$T^{-1}$は$C^1$級である．すなわち，Tは$C^1$級微分同相写像である．

次に，$T_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$　$(0\leqq t\leqq 1)$を$T_t(x_0)=\varphi(t;0,x_0)$と定義すると，これは$C^1$級微分同相写像で$T_0=1_{\mathbb{R}^n}$（恒等写像）$T_1=T$となる．そして，$T_t$の定義する写像$\mathbb{R}^n\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$は$C^1$級である．すなわち，Tは$1_{\mathbb{R}^n}$とisotopic．

<u>命題2</u>　$\varphi(t+1;0,x_0)=\varphi(t;0,T(x_0))$，$t\in\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}^n$

<u>証明</u>　$x(t)=\varphi(t+1;0,x_0)$が(1)の解であることが$f(t,x)$のtに関する周期性からわかる．そして$x(0)=\varphi(1;0,x_0)=T(x_0)$と解の一意性から上の等式が得られる．

<u>系1</u>　$\varphi(t+k;0,x_0)=\varphi(t;0,T^k(x_0))$，$k\in\mathbb{Z}$

<u>系2</u>　(1)の解$x(t)$が周期k（kは自然数）の周期解
$\rightleftarrows$　$x(0)$がT^kのfixed point
$\rightleftarrows$　$x(0)$がTの周期kのperiodic point

<u>注意1</u>　周期が有理数の周期解$x(t)$に対して，$x(0)$はTの周期点である．

<u>注意2</u>　周期が無理数の周期解$x(t)$に対して，$x(0)$はTのrecurrent pointである．したがって，特にnon-wandering

である.

<u>定義</u> $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の不動点 p に対して，その微分（ヤコビ行列）を $DT(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ とする いま $DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて1と異なるとき，p を T の hyperbolic（双曲型）不動点という．

$DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて1より大きいとき，p を source といい，これらがすべて1より小さいとき，p を sink という．また，絶対値が1より大きいものと1より小さいものの両方が存在するとき，p を saddle という．

$n=2$ のとき，$\det DT(p)>0$（命題1からわかる）に注意すると，hyperbolic な不動点は次の4種類である．

$DT(p)$ の固有値（特性根）を λ_1, λ_2 とする

(a) $|\lambda_1|>1$, $|\lambda_2|>1$ completely unstable (source)

(b) $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$ completely stable (sink)

(c) $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ directly unstable (saddle)

(d) $\lambda_2<-1<\lambda_1<0$ inversely unstable (saddle)

T の周期点 p に対しても，その最小周期 k を用いて，T^k の不動点と考え，p が T^k の hyperbolic な不動点のとき，これを T の hyperbolic periodic point と定義する．そして，source, sink, saddle 等が不動点の場合と同様に定義される．

以下簡単のため，不動点についてのみ考察するが，周期点の場合も同様なことが成立する．

いま，p を T の不動点とする．このとき，$DT(p)$ は次のようにして求めることができる．

(1) の解 $x=\varphi(t;0,p)$ は周期1の周期解である．そこで，(1) の $\varphi(t;0,p)$ に関する変分方程式を考える．

(2) $\quad \dot{x} = D_x f(t,\varphi(t;0,p))\,x$

ここで，$D_x f(t,x)$ は $f(t,x)$ の x に関する偏微分（ヤコビ行列）である．

(2) は仮定から，周期1の連続な周期関数を係数にもつ線形常微分方程式である．そこで，この基本行列を $W(t)$ とすると，次の命題が成立する．

命題3 $\quad DT(p) = W(1)\,W(0)^{-1}$

証明 変分方程式の定義と，T の定義から容易に確かめられる．

命題4 $\quad p$ が hyperbolic $\rightleftarrows$ (2) の characteristic exponents はすべてその real parts が0でない．

証明 Floquet理論を用いてわかる．

定義 $p \in R^n$ を T の hyperbolic な不動点とする．いま，$L = DT(p) : R^n \to R^n$ の絶対値が1より大きい固有値に対する一般化された固有空間の直和と R^n の共通部分を E^u とお

き，絶対値が1より小さい固有値に対する一般化された固有空間の直和と $\mathbb{R}^n$ の共通部分を E^s とおく．

命題5 (a) $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, $L(E^s)=E^s$, $L(E^u)=E^u$

(b) $L=DT(p)$ の特性根（固有値）を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とするとき，

$$\dim E^s = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i|<1\}, \quad \dim E^u = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i|>1\}$$

(c) 適当な定数 c $(c>0)$, λ $(0<\lambda<1)$ があって

$$\left.\begin{array}{l} \|L^k(x)\| \leqq c\lambda^k\|x\|, \ x\in E^s \\ \|L^{-k}(x)\| \leqq c\lambda^k\|x\|, \ x\in E^u \end{array}\right\} \quad (k\geqq 1)$$

定義 p を T の hyperbolic な不動点とするとき，

$$W^s(p)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^k(x)=p\}$$
$$W^u(p)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^{-k}(x)=p\}$$

とおき，$W^s(p)$ を p の stable manifold，$W^u(p)$ を p の unstable manifold という．

定理（Stable Manifold Theorem）適当な 1-1 immersion $\phi^s: E^s \to \mathbb{R}^n$ があって，次のことが成立する．

(a) $\phi^s(E^s)=W^s(p)$ (b) $\phi^s(0)=p$ (c) $\dim W^s(p)=\dim E^s$

命題5および上の定理の証明については，白岩[6]を参照のこと．

注意3 Unstable Manifold に対しても上と同様の定義が成立する．また，hyperbolic な periodic point に対しても，同様なことが成立する．

§2 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とし，p をその不動点とする．いま，$1-T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $(1-T)(x)=x-T(x)$ と定義すると $(1-T)(p)=0$ となる．

p を T の isolated fixed point とする．すなわち，p の適当な近傍 U があって，$T(x)=x$，となるような U の点は p 以外に存在しないものとする．すると，$(1-T)(U-\{p\})\subset \mathbb{R}^n-\{0\}$ となる．したがって，$1-T$ は $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群の間の準同型写像

$$(1-T)_* : H_n(U, U-\{p\}) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\})$$

をひき起こす．

ここで，$H_n(U, U-\{p\}) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\}) \approx \mathbb{Z}$ であって，$\mathbb{R}^n$ に orientation を定めれば，これらの群の生成元 O_U, $O_{\mathbb{R}^n}$ が一意的に定まる．したがって，適当な $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$(1-T)_*(O_U) = m\, O_{\mathbb{R}^n}$$

が成立する．この m は U のとり方に無関係である．これを，p の T に関する (fixed point) index といい，$\mathrm{index}_T(p)$ または $\mathrm{index}(p)$ と表わす．

命題6 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とし，p をその hyperbolic な不動点とする．このとき，次のことが成立する．

(a) p は T の isolated fixed point である．

(b) $\mathrm{index}_T(p)$ は次のように求められる．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) > 0 \\ -1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) < 0 \end{cases}$$

証明　Hartmanの定理（白岩［6］）により，Tがhyperbolicな同型写像で，$p=0$のときに証明すれば十分である．そこで，この場合，$1-T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$は同型写像となるから，$\det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p))$が正になるか負になるかにしたがって，$1-T$は$\mathbb{R}^n$のorientationを保ったり，反対にしたりする．このことからすぐわかる．

命題7　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & 1\text{より大きな}DT(p)\text{の実固有値の個数が偶数} \\ -1, & \text{―――――――――――――――― が奇数} \end{cases}$$

系1　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．
$\dim E^u = u$とし，$L_u = DT(p)|E^u : E^u \to E^u$とする．

(a)　$\det L_u > 0$ なら　$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^u$，$k \geq 1$．

(b)　$\det L_u < 0$ なら　$\mathrm{index}_{T^{2k+1}}(p) = (-1)^{u+1}$，$k \geq 0$

$\mathrm{index}_{T^{2k}}(p) = (-1)^u$，$k \geq 1$

系2　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　pがsourceなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^n$，$k \geq 1$

(b)　pがsinkなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$，$k \geq 1$

命題7は命題6を用いてわかる．実際，$1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)$をJordanの標準形を用いて表わし，その行列式の符号を$DT(p)$

の特性根（固有値）を用いて計算することによって，命題7の結果を得る．

系1は命題7と簡単な線形代数の計算によって求めることができる．系2は系1と $\det L > 0$ からわかる．

例　$n=2$ とすると系2から次のことがわかる．

p が completely stable または completely unstable なら

$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$ ，$k \geq 1$

また，系1から次のことがわかる．

p が directly unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = -1$ ，$k \geq 1$

p が inversely unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = \begin{cases} +1, & k: \mathrm{odd} \geq 1 \\ -1, & k: \mathrm{even} \geq 2 \end{cases}$

定理（Poincaré - Hopf - Lefschetz）$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とし，T の不動点はすべて isolated とする．いま，n 次元閉球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって，次の条件

(a)　$T(K) \subset K$，

(b)　T の不動点はすべて K に含まれる．

をみたすならば，次の等式が成立する．

$$\sum_{T(p)=p} \mathrm{index}_T(p) = 1$$

系　$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像，k を自然数とする．いま周期 k の T の周期点はすべて hyperbolic とし，

n次元閉球と同相なR^nの部分集合Kがあって，次の

(a)　$T^k(K)\subset K$

(b)　周期kのTの周期点はすべてKに含まれる．

が成立するとき，次の等式が成立する．

$$\sum_{T^k(p)=p} \mathrm{index}_{T^k}(p)=1$$

系は上の定理からすぐわかる．また，定理の証明はDold [1]を参照されたい．

__§3__　ここでLevinson-Masseraの等式とその一般化について示す．

__定義__　方程式(1)がdissipative（D-system）

$\rightleftarrows$　適当な正数Rと自然数Nがあって，(1)の任意の解$x(t)$に対して，次のことが成立する．

適当な$t_0\in R$に対して，$\|x(t_0)\|\leqq R$ および

$\|x(t)\|\leqq R$，$t\geqq t_0+N$

__例1__（Levinson-Langenhop-Opial）次の方程式

(3)　$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t)$

において，$f(x,v)$，$g(x)$，$e(t)$はC^1級とし，これらは次の条件(a)～(d)を満たすものとする．

(a)　$e(t)$は周期1の周期関数で，$E=\max|e(t)|$とおく．

(b)　適当な正数m, aがあって，次の不等式が成立する．

$$f(x,v) \geqq m \quad \text{for} \quad |x| \geqq a, \ |v| \geqq a$$

(c) 適当な正数Mがあって, $f(x,v) \geqq -M$

(d) $\liminf_{x\to\infty} g(x) > Ma+E$, $\limsup_{x\to-\infty} g(x) < -(Ma+E)$

方程式(3)は次の方程式と同値である.

$$(3)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(3)'は D-system である. (Opial [5])

例 2 (Duffing's Equation) 次の方程式

$$(4) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

において, $f(x)$, $g(x)$, $e(t)$は次の条件をみたすものとする.

(a) $e(t)$は周期1の周期関数でC^1級とし, $E = \max|e(t)|$とする.

(b) 適当な正数 c があって, $f(x) \geqq c$ となる.

(c) $g'(x) \geqq 0$ であって, $\lim_{x\to\infty} g(x) > E$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) < -E$

方程式(4)は次の方程式と同値である.

$$(4)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(4)'は D-system である. (例1, 白岩 [7])

2次元の D-system

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,x,y) \end{cases}$$

に対して, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をその Poincaré 変換とする.

いま，各自然数 k に対して，周期 k の周期点はすべて hyperbolic とすると，周期 k の周期点の個数は有限となる．そこで，自然数 q に対して，

$C(q) = \#\{$最小周期 q の completely stable または completely unstable な周期点$\}$

$I(q) = \#\{$最小周期 q の inversely unstable 周期点$\}$

$D(q) = \#\{$最小周期 q の directly unstable 周期点$\}$

とおくと，次の定理が成立する．

定理（Levinson－Massera）以上の仮定と記号のもとで，次の等式が成立する．

$$C(1) + I(1) = D(1) + 1$$

q：奇数（$q > 1$）なら　$C(q) + I(q) = D(q)$

q：偶数なら　$C(q) + I(q) = D(q) + 2I\left(\frac{q}{2}\right)$

この定理の証明は Massera [4] を参照されたい．

この定理を一般の次元 n に拡張しよう．このため，次のような定義を用意しよう．

定義　方程式 (1) が D'-system

$\Longleftrightarrow$　n 次元閉球と同相な R^n の部分集合 K があって，次の性質が成立する．

(a)　(1) の任意の解 $x(t)$ に対して，適当な $t_0 \in R$ があって，$x(t_0) \in K$．

(6) (1) の任意の解 $x(t)$ に対して，次のことが成立する．

$x(t_1) \in K$ なら，$x(t) \in K$，$^\forall t \geq t_1$

定義から，次の命題は明らかである．

命題8 D'-system は D-system である．

例3 例1，例2の D-system は実は D'-system である．例えば Opial [5]，白岩 [7] を参照のこと．

例4 (x, y) 平面上で，原点から十分はなれた点に対して，常にその点を通る単一閉曲線が対応して，$t = t_0$ (t_0は任意) のとき，その単一閉曲線の点を通る解 $(x(t), y(t))$ は t が増すとき，(x, y) 平面上でその単一閉曲線の内部に向うような2次元の system を E-system という（古屋 [2]）．

E-system は D'-system である．

定義 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とする．いま，p を T の hyperbolic な不動点とし，$L = DT(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ による $\mathbb{R}^n$ の直和分解を $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ とする．そして，$L_u = DT(p) | E^u : E^u \to E^u$ とおく．

そのとき，

$\det L_u > 0$，$\dim E^u = \text{even}$ なら，p を PD 型

$\det L_u > 0$，$\dim E^u = \text{odd}$ なら，p を ND 型

$\det L_u < 0$，$\dim E^u = \text{even}$ なら，p を PI 型

$\det L_u < 0$，$\dim E^u = \text{odd}$ なら，p を NI 型

と定義する．

周期点についても同様に定義する．

<u>定理</u>　方程式(1)がD-systemとし，$T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$をそのPoincaré変換とする．そして，すべての自然数qに対して，周期qの周期点はすべてhyperbolicとする．

このとき，各自然数qに対して，周期がqの周期点の個数は有限個となる．そこで，いま

$PD(q)=\#\{$最小周期qのPD型周期点$\}$

$ND(q)=\#\{$　〃　〃　ND型　〃　$\}$

$PI(q)=\#\{$　〃　〃　PI型　〃　$\}$

$NI(q)=\#\{$　〃　〃　NI型　〃　$\}$

$N(q)=\#\{$最小周期qの周期点$\}$

とおくと，次の等式が成立する．

$$PD(1)+NI(1)=ND(1)+PI(1)+1$$

$$\begin{aligned}N(1)&=PD(1)+ND(1)+NI(1)+PI(1)\\&=2(ND(1)+PI(1))+1\end{aligned}$$

qを1より大きい奇数とすると

$$PD(q)+NI(q)=ND(q)+PI(q)$$

$$\begin{aligned}N(q)&=PD(q)+ND(q)+NI(q)+PI(q)\\&=2(PD(q)+NI(q))=2(ND(q)+PI(q))\end{aligned}$$

qを偶数とすると

$$PD(q)+NI(q)+2PI(q/2)=ND(q)+PI(q)+2NI(q/2)$$

$$\begin{aligned} N(q) &= PD(q)+ND(q)+NI(q)+PI(q) \\ &= 2\left(ND(q)+PI(q)+NI(q/2)-PI(q/2)\right) \end{aligned}$$

<u>系</u>　上の定理と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　$N(1)$は奇数である．

(b)　qを1より大きい奇数とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

(c)　qを偶数とし，$PI(q/2)=NI(q/2)$とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．特に，$PI(q/2)=NI(q/2)=0$ならば，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

この系は上の定理からすぐわかる．また，上の定理は，命題7系1，Poincaré-Hopf-Lefschetzの定理等を用いて，Massera[4]と同様に証明できる．詳細は白岩[8]を参照されたい．

参考文献

[1]　A. Dold : Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts, Topology 4 (1965), 1–8

[2]　古屋茂：非線型問題（強制振動論），共立，1957

[3]　N. Levinson : Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 45 (1944), 723–737, Corrections, ibid. 49 (1948), 738

[4] J.L. Massera : The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 50 (1949), 118–126

[5] Z. Opial : Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop, Ann. Polon. Math. 7 (1960), 241–246

[6] 白岩謙一：力学系の理論，岩波，1974

[7] 〃 : Boundedness and Convergence of solutions of Duffing's Equation, to appear

[8] 〃 : A generalization of the Levinson-Massera's equalities, to appear